

TD N° 2: MÉCANIQUE DU POINT  
**Référentiels non galiléens - dynamique terrestre - gravitation**

Exercices techniques cinématique relativiste

**EXERCICE N°1: Les différentes périodes des astres**

- ❶ JOUR SOLAIRE ET JOUR SIDÉRAL (D'APRÈS CENTRALE)  
La durée du jour solaire moyen est la durée  $T_m$  qui sépare, en moyenne, deux positions successives du Soleil au zénith dans son mouvement dans le référentiel terrestre. La durée du jour sidéral est la durée  $T_s$  que met la Terre pour faire un tour sur elle-même dans le référentiel géocentrique (référentiel dans lequel le centre de la Terre est immobile).

Montrer que  $T_m - T_s = \frac{T_m^2}{T_a + T_m}$  où  $T_a$  est la période de révolution de la Terre autour du soleil. Calculer  $T_m - T_s$ , sachant que  $T_m = 86400 \text{ s}$  et  $T_a = 365,25 \times T_m$

- ❷ LUNAISON SYNODIQUE ET LUNAISON SIDÉRALE  
La lunaison synodique est la durée  $T_n$  qui sépare deux nouvelles lunes. La lunaison sidérale est la durée  $T_s$  de révolution de la Lune autour de la Terre dans le référentiel géocentrique (référentiel dans lequel le centre de la Terre est fixe).

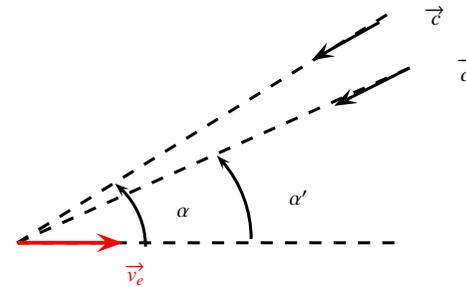
Montrer que  $T_n - T_s = \frac{T_s^2}{T_a - T_s}$ .

Calculer  $T_n - T_s$  en jour, sachant que  $T_s = 27,3 \text{ j}$ .

**EXERCICE N°2: Aberration de la lumière provenant des étoiles**

Une étoile dans l'espace émet de la lumière possédant la vitesse  $\vec{c}$  avec  $\|\vec{c}\| = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

- ❶ Quelle est la vitesse  $\vec{c}'$  de la lumière provenant de cette étoile dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_t$ ? On notera  $\vec{v}_e$  la vitesse d'entraînement de la Terre dans le référentiel de Copernic  $\mathcal{R}_{Cop}$ .



**Attention:** on raisonnera comme si la loi de composition galiléenne des vitesses restait valable même si l'une des deux vitesses est égale à  $\vec{c}$  (la loi de composition relativiste est obtenue par la transformation de Lorentz, non celle de Galilée).

- ❷ La lumière de l'étoile provient de la direction repérée par l'angle  $\alpha$  par rapport à la direction de  $\vec{v}_e$ . A cause du mouvement de la Terre, on observe depuis la Terre l'étoile dans une direction  $\alpha'$  différente de  $\alpha$  par rapport à la direction de  $\vec{v}_e$ . On exprimera  $\tan \alpha'$  en fonction de  $\alpha$ ,  $v_e$  et  $c$  (les angles étant pris positifs).
- ❸ Evaluer  $\alpha - \alpha'$  en seconde d'arc pour  $v_e = 30 \text{ km.s}^{-1}$ ,  $\alpha = 90^\circ$ . L'effet est-il mesurable?

Exercices techniques de dynamique relativiste

**EXERCICE N°3: Pesanteur apparente**

La planète Jupiter tourne autour de son axe en  $9\text{h } 51 \text{ min}$ , a un rayon d'environ  $7.10^4 \text{ km}$  et l'accélération de la pesanteur sur sa surface est:  $26,5 \text{ m.s}^{-2}$ . Quelle est la déviation maximale du fil à plomb avec la verticale planétaire à la surface de Jupiter?

**EXERCICE N°4: Objet déposé sur un manège**

Un manège est en rotation à vitesse angulaire constante  $\omega$ . Un objet est déposé sans vitesse initiale sur le plateau à distance  $r_0$  de l'axe. En supposant que l'objet puisse se déplacer sans frottement sur le plateau du manège, étudier ses trajectoires dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié au sol et dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au manège suivant que l'objet est déposé par un expérimentateur lié au sol ou par un expérimentateur sur le manège.

**EXERCICE N°5: Mise en évidence de la force de Coriolis: déviation vers l'est mais aussi vers le sud (cette dernière est moins connue!!)**

On étudie le mouvement d'une particule de masse  $m$ , qui tombe librement, à partir du point  $A$  (de latitude  $\lambda$ ) situé à une hauteur  $h$  au dessus du sol. On choisira le référentiel  $[Axyz]$  ( $[Ax]$  tangent au parallèle, dirigé vers l'est;  $[Ay]$  tangent au méridien dirigé vers le nord, et  $[Az]$  verticale dirigée vers le haut) pour repérer la position de la particule.

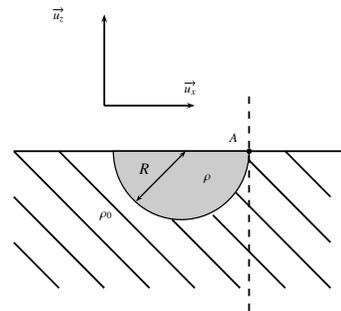
On désigne par  $\omega$  la vitesse de rotation de la Terre (la période  $T$  de rotation de la Terre sur elle-même est 1 jour autour de la ligne des pôles).

- ❶ Montrer que dans l'hémisphère Nord, au second ordre près en  $\omega$  (sachant qu' $\omega$  possède une valeur très faible) la particule est déviée par rapport à la verticale d'une quantité  $y_1$  vers le Sud, et d'une quantité  $x_1$  vers l'est.
- ❷ Exprimer les déviations  $x_1$  et  $y_1$ , à l'arrivée au sol, en fonction de  $\omega$ ,  $h$ ,  $\lambda$ , et  $g$ .
- ❸ *Application numérique:* Calculer les deux composantes  $x_1$  et  $y_1$  de la déviation pour  $h = 200 \text{ m}$  en un lieu où la latitude est  $\lambda = 45^\circ$ .

**Exercices techniques gravitation**

**EXERCICE N°6: Inhomogénéité du sol terrestre**

On cherche dans cet exercice à modéliser l'impact d'un défaut de la croûte terrestre (cavité, vaste nappe de pétrole) sur les caractéristiques de la pesanteur. Pour cela, on propose de modéliser ce défaut par une demi-sphère de rayon  $R$ , de masse volumique  $\rho$  à la surface de la Terre dont la matière possède par ailleurs une masse volumique  $\rho_0 > \rho$



- ❶ Justifier que l'accélération de pesanteur  $\vec{g}$  fait un angle avec la verticale attendue (en pointillés), c'est-à-dire la verticale qu'il y aurait eu s'il n'y avait pas eu de défaut.
- ❷ Déterminer, au point  $A$ , cet écart angulaire  $\alpha$  en fonction de  $g_0$  (norme de l'accélération de pesanteur),  $\rho$ ,  $\rho_0$  et  $R$ . Pour cela, on montrera que le défaut

<sup>1</sup> $a_e < g$

est gravitationnellement équivalent à l'ajout, à une Terre sans défaut, d'une demi-sphère de densité  $\rho - \rho_0$  et on cherchera la composante sur  $\vec{u}_x$  de l'attraction gravitationnelle d'une telle demi-sphère.

**Problèmes contextualisés**

**EXERCICE N°7: Le jeu du verre d'eau**

Deux amis installés à la terrasse d'un café décident de jouer à un jeu plus infantile que la physique qu'il dissimule, seul objet de cet exercice!

Pour cela, ils demandent au serveur de leur apporter à chacun un verre d'eau, les deux verres identiques de rayon  $R$  de hauteur  $H_0$  étant soigneusement remplis d'une même hauteur d'eau  $h$ . Le but du jeu est de faire tourner le verre assez vite autour de son axe de symétrie  $[Oz]$  afin de faire déborder l'eau qu'il contient. Le premier qui y parvient gagne le jeu.

- ❶ Déterminer, lorsque le verre tourne à la vitesse  $\omega$ , la forme globale, puis l'équation précise  $z = f(r)$  de la surface de l'eau que l'on appelle **surface libre**.
- ❷ Quelle vitesse de rotation minimale  $\omega_{min}$  permet de remporter le jeu?

On prendra l'origine de l'axe  $[Oz]$   $z = 0$  à la base du verre.

**EXERCICE N°8: Un salarié vraiment pointilleux**

Un liftier, bien décidé à mener la vie dure à ses employeurs d'un grand hôtel parisien, enregistre très précisément ses horaires de travail à l'aide d'une horloge disposée à l'intérieur même de l'ascenseur. Cette horloge «d'époque» fonctionne avec un simple balancier (donc type pendule).

Que l'ascenseur monte ou descende, on considèrera ses accélérations et décélérations  $a_e$  parfaitement uniformes et constantes de même valeur absolue<sup>1</sup>.

Si le liftier est payé à l'heure, mesurée par cette bonne vieille horloge, est-il sous-payé ou sur-payé?

**EXERCICE N°9:**

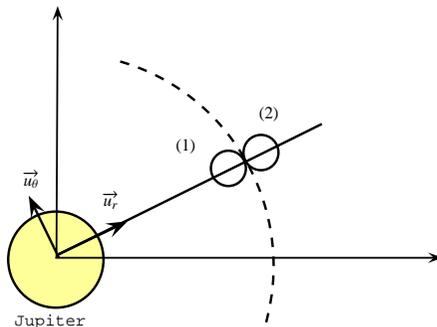
**Comète SHOEMAKER-LEVY 9**

La comète de SHOEMAKER-LEVY 9 est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour se fragmenter et éclater en morceaux à cause des forces de marée de Jupiter. Les différents morceaux de la comète se sont finalement écrasés sur Jupiter en juillet 1994 et cette collision a été suivie en détail et en direct par les astronomes du monde entier. Le but de cet exercice est de comprendre, à l'aide d'un modèle simple, l'origine de la fragmentation.

On supposera que le référentiel Jupiterocentrique  $\mathcal{R}_J$  est galiléen et on négligera dans tout le problème les effets dus au Soleil dans ce référentiel. Jupiter est supposée sphérique et homogène. Données numériques : rayon de Jupiter :  $R_J = 71400 \text{ km}$ , masse de Jupiter :  $M_J = 1,91 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ , constante de gravitation :  $G = 6,67 \cdot 10^{11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ , masse volumique de la glace :  $\mu_c = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

On cherche à déterminer la distance en dessous de laquelle un corps (ici la comète) s'approchant de Jupiter se séparerait en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marée dues à Jupiter. Pour cela, on fait les deux hypothèses suivantes :

- La comète de masse volumique  $\mu_c$  est en orbite circulaire de rayon  $r$  autour de Jupiter.
- La comète est constituée de deux sphères identiques de masse  $m$  et de rayon  $d$ , homogènes et disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. Les deux sphères (1) et (2) ne sont liées entre-elles que par leur attraction gravitationnelle mutuelle. On suppose que la disposition des sphères reste inchangée au cours de la rotation de la comète, leurs centres étant toujours alignés avec le centre de Jupiter.



On définit enfin le référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation avec la comète autour de Jupiter ainsi que la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  liée à ce référentiel.

- 1 En appliquant le théorème du centre de masse à la comète en mouvement dans le référentiel Jupiterocentrique, exprimer la vitesse  $\omega$  de rotation de la comète autour de Jupiter. En utilisant le fait que  $d \ll r$ , en déduire la relation:

$$\omega^2 \simeq \frac{GM_J}{r^3}$$

- 2 Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est-il galiléen? Justifier.
- 3 Faire le bilan complet des forces exercées sur la partie (1) de la comète dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  dans le cas où le contact entre les deux sphères est maintenu, en distinguant les forces intérieures et les forces extérieures.
- 4 En traduisant l'équilibre de la sphère (1) dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , montrer que l'action de contact  $N_1$  exercée par la sphère (2) s'écrit de manière approchée:

$$N_1 = \frac{GM_J m}{r^2} \left( \frac{m}{4M_J} \cdot \frac{1}{\epsilon^2} - 3\epsilon \right) \quad \text{où } \epsilon = \frac{d}{r} \ll 1$$

- 5 En déduire que le contact entre les deux sphères est rompu lorsque la distance  $r$  devient inférieure à  $r_{lim}$  ( $r_{lim}$  est nommée limite de Roche). Exprimer  $\frac{r_{lim}}{R_J}$  en fonction de  $\mu_c$  et  $\mu_c$ . Faire l'application numérique.
- 6 En réalité, les observations ont montré que la fragmentation de la comète s'est produite lorsque celle-ci est arrivée à une distance  $r_0 = 1,5 \cdot R_J$  de Jupiter. Proposer une explication.

**EXERCICE N°10:**

**La limite de Roche et les anneaux de Saturne**

«Les anneaux de Saturne sont la conséquence directe de l'existence des forces de marée.»



❶ LA LIMITE DE ROCHE

Une planète supposée sphérique, de centre  $O$ , de rayon  $R_P$ , et de masse  $M_P$  est supposée fixe dans un référentiel galiléen ( $\mathcal{R}_0$ ). Un satellite sphérique également, de centre  $S$ , de rayon  $R_S$ , et de masse  $M_S$  décrit une orbite circulaire de rayon  $R_0$  autour de  $O$ . Le satellite est supposé en rotation uniforme autour de la planète à la vitesse angulaire  $\omega_0$ . On prendra comme hypothèse forte que la direction  $OS$  reste fixe par rapport au satellite. La planète et le satellite sont supposés tous deux homogènes de masses volumiques respectives  $\mu_P$  et  $\mu_S$ .

On considère un point  $P$  de masse  $m$  du satellite situé à une distance  $r$  de son centre  $S$ . On supposera  $r \ll R_0$ .

a. Montrer que la vitesse angulaire de rotation du satellite autour de la planète est:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_P}{R_0^3}}$$

b. Montrer que la résultante des forces subies par le point  $P$  peut s'écrire:

$$\vec{R} = Gm \left[ \frac{3M_P}{R_0^3} - \mu_S \frac{4}{3}\pi \right] r \cdot \vec{u} \quad (1)$$

**Important:** la masse du satellite à prendre en compte dans le calcul de la force de gravitation exercée par ce dernier sur le point  $P$  est uniquement celle contenue dans la sphère de rayon  $r$  (masse "active").

❷ LES ANNEAUX DE SATURNE.

a. Maintenant muni de ce résultat, pouvez-vous justifier l'assertion donnée en introduction de cet exercice?

b. Estimer l'ordre de grandeur des anneaux de Saturne. Ce modèle vous semble-t-il cohérent?

On donne:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{masse de Saturne: } M_P = 568,3 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ \text{masse volumique de la glace à } \approx -273^\circ\text{C: } \mu_S = 895 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \\ \text{rayon de la planète Saturne: } 58232 \text{ km} \end{array} \right.$

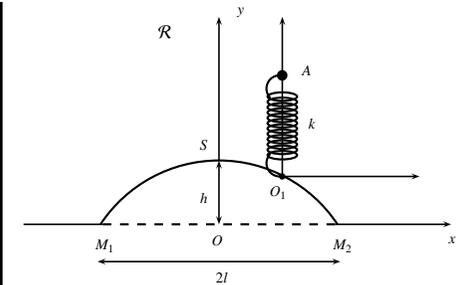
**EXERCICE N°11: Les enfants qui chahutent en voiture!**

On considère un véhicule en mouvement de translation uniforme de vitesse  $\vec{v}$  sur une route curviligne d'équation cartésienne  $y = f(x)$ .

$\mathcal{R}(O, x, y, z)$  est le référentiel terrestre supposé galiléen.

On associe à un des essieux de ce véhicule le référentiel  $\mathcal{R}'(O', x, y, z)$ .

L'habitacle du véhicule est suspendu par un dispositif d'amortissement. Nous schématiserons cet habitacle par un point matériel  $A$  de masse  $m$  lié à l'origine  $O_1$  par un ressort de raideur  $k$ , de longueur naturelle  $l_0$  forcé à évoluer selon l'axe  $[O_1y]$ .



OBJECTIF: on cherche à étudier les effets de la forme de la route sur les «sensations» des passagers du véhicule.

❶ Dégager que la composante suivant la verticale ascendante  $[Oy]$  de l'accélération du point  $O'$  dans  $\mathcal{R}$  s'écrit:

$$a_y = \frac{v^2 f''}{(f'^2 + 1)^2} \quad \text{avec: } \begin{cases} f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \\ f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \end{cases}$$

- ❷ Quelle est l'équation régissant le mouvement de l'habitacle de la voiture.
- ❸ Le système d'amortissement couplé au ressort de rappel (combiné d'amortissement) applique une force de frottement fluide. Déterminer l'expression la tension  $\vec{T}$  du ressort dans le cas où la force supplémentaire de frottement permet à  $A$  de revenir très rapidement à l'équilibre dans  $\mathcal{R}'$ . Comparer  $\vec{T}$  au poids en commentant le résultat en fonction du profil de la route; expliquer par exemple la sensation de "soulèvement d'estomac".
- ❹ Une famille se déplace dans ce véhicule sur la route des vacances plutôt mal entretenue, et donc jalonnée de bosses et creux. Les enfants, installés sur la banquette arrière et toujours avides de sensations, réclament au papa alors au volant de la voiture de faire bondir celle-ci sur une bosse de profil parabolique donné ci-dessus, afin qu'ils se sentent "[...] les plus légers possibles au sommet de la bosse!" Comment ce bon père de famille, attentif au bonheur de ses enfants, doit-il s'y prendre?

**EXERCICE N°12: La guerre froide**

La guerre froide fut une période de course à l'armement nucléaire sans précédent entre les deux grandes puissances soviétique et américaine et leurs alliés respectifs du pacte

de Varsovie et de l'OTAN. Dans les différents scénarios de guerre totale thermonucléaire imaginés par les stratèges militaires, l'occident devait pouvoir toucher Moscou par des tirs de missiles balistiques initiés depuis ses bases militaires occidentales. La France, bien qu'absente du commandement intégré de l'OTAN depuis 1966 n'échappa pas à cette logique, et lança un vaste programme de développement de missiles balistiques moyenne et longue portée, et développa ainsi le concept de dissuasion nucléaire<sup>2</sup>

Ainsi, des missiles balistiques tirés depuis Paris<sup>3</sup> devaient pouvoir toucher le cœur de la ville de Moscou distante de 2500 kms.

On supposera que Paris et Moscou sont sur le même parallèle de latitude  $\lambda = 45^0$  nord, et que l'on tire le missile "plein Est" avec une inclinaison de  $45^0$  par rapport à l'horizontale,

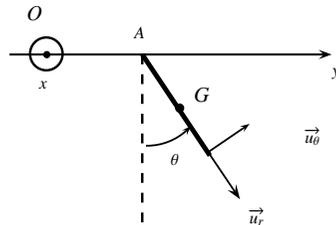
- ❶ Calculer, en considérant dans un premier temps la Terre comme un référentiel galiléen, la vitesse initiale à donner au projectile ainsi que son temps de vol.
- ❷ Si maintenant on considère le caractère non galiléen de la Terre, l'état major français est-il certain de pouvoir toucher Moscou avec de tels paramètres de vol? Préciser le temps de vol du missile et la position d'impact.

**EXERCICE N°13: Excitation d'un pendule - résonance**

**Prérequis MPSI pour cet exercice:** notion de moment d'inertie d'un solide et théorème du moment cinétique<sup>4</sup>.

Une tige métallique homogène de masse  $m$  et de longueur  $l$  est reliée en  $A$  à un axe  $[Ax]$  par une liaison pivot parfaite. On repère l'orientation de la tige par l'angle  $\theta(t)$  avec la verticale. Un opérateur agite l'axe  $[Ax]$  horizontalement par rapport au référentiel galiléen d'une quantité  $\vec{OA} = y_A(t) \cdot \vec{u}_y$  ( $O$  est fixe dans le référentiel terrestre considéré galiléen).

On donne  $J_{Ax} = \frac{1}{3}ml^2$ .



On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}$  défini  $(A, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

<sup>2</sup>Compte tenu du potentiel «raisonnable» de destruction (16 missiles terrestres et 32 missiles envoyés depuis 2 sous-marins), cette stratégie porta le nom de "réponse du faible au fort".

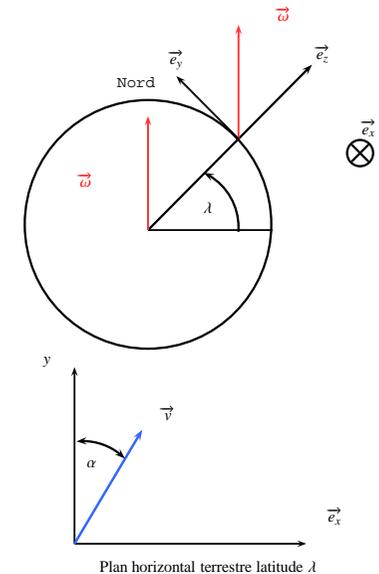
<sup>3</sup>Les silos de tirs étaient en fait implantés sur le Plateau d'Albion que nous considérerons à la même latitude que Paris et Moscou.

<sup>4</sup>Ces éléments du programme de MPSI seront revus dans un prochain cours.

- ❶ Quel est le mouvement du référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport au référentiel terrestre? Quel est celui de la barre dans  $\mathcal{R}$ ?
- ❷ Faire le bilan des forces exercées sur la tige.
- ❸ Calculer les moments de ces forces en projection sur  $[Ax]$ .
- ❹ En appliquant le théorème du moment cinétique scalaire, donner une équation satisfaite par  $\theta(t)$ .
- ❺ Le déplacement  $y_A(t)$  est désormais sinusoïdal, d'amplitude  $Y$  et de pulsation  $\omega$ . En régime sinusoïdal forcé, donner l'amplitude  $\theta_0$  de la variable  $\theta(t)$  dans le cadre des petites oscillations.
- ❻ Pour quelle pulsation  $\omega_0$  cette amplitude est-elle maximale?

**EXERCICE N°14: Encore un problème pour la SNCF?**

On considère une motrice de train seule en trajet "test" entre Bordeaux et Paris. La motrice possède une masse de  $m = 80 T$  et se déplace à  $v = 350 km.h^{-1}$ . On considèrera une latitude de  $\lambda = 45^0N$  et la voie ferrée faisant un angle  $\alpha = 30^0$  avec un méridien.



- ❶ Déterminer toutes les caractéristiques de la composante horizontale  $\vec{T}_m$  de l'action de la motrice sur la voie.

- ② Déterminer de même la composante verticale  $\vec{N}_m$  de l'action de la motrice sur la voie. On fera une hypothèse raisonnable concernant le poids.

Faire l'application numérique et commenter ces résultats, en particulier le risque d'usure différentielle des rails.